

*Ovo se štivo može čitati i za razbibrigu. ... Očita je namjera autora približiti matematičke i fizičke probleme širem krugu čitatelja.*

*... dovoljno duboko da nas zainteresira i potakne na daljnje promišljanje ili samostalno istraživanje, a opet dovoljno jednostavno da ne odustanemo zbog prekomplificiranog matematičkog jezika.*

*Autor je fasciniran ljepotom matematike i to nam daje do znanja u svakom poglavljju knjige.*

Melita Sambolek

*Knjiga je pisana znanstveno-popularnim stilom i ima tri naglašena, međusobno povezana, dijela.*

*... pokazuje kako istraživanje nekog specijalnog slučaja, mogli bismo reći uske pukotine prema izvoru sveopćeg znanja, može dovesti do otkrića koje bi malo tko, promatrajući početni specijalni slučaj, uopće mogao i naslutiti.*

*Knjiga je vrijedno djelo u kojemu su na pregledan i pristupačan način izloženi brojni bitni rezultati razvoja matematičke i fizičke misli, vezane uz pojam beskonačnosti ...*

Goran Igaly

Koje nas teme očekuju u ovoj knjizi?

- pogled izbliza na toliko bitan broj  $\pi$
- prostorni i prostorno-vremenski singulariteti
- formule matematičkog genija koji je spoznao beskonačnost
- fascinantni svijet fraktala
- intrigantan pojam prostor-vremena
- najveća Einsteinova pogreška

# Susreti konačnog i beskonačnog

Koliko je beskonačno daleko?

Ivica Martinjak

Crotech  
Zagreb, 2020.

Susreti konačnog i beskonačnog, koliko je beskonačno daleko?

Copyright © doc. dr. sc. Ivica Martinjak, 2020.

Nakladnik  
*Crotech, Zagreb*

Recenzija  
*dr. sc. Goran Igaly*  
*Melita Sambolek, prof.*

Ilustracije i crteži  
*Andrea Behin, mag. math.*

Design naslovnice  
*Tena Grgić, mag. ing. techn. graph.*

Lektura  
*Marina Žilavec, prof.*

Tisak  
*Tiskara Zelina d.d., Sveti Ivan Zelina*

ISBN 978-953-49115-0-1

CIP zapis je dostupan u računalnome katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 001070142.

Zagreb, 2020.

# Sadržaj

Predgovor	5
Prolog	13
<b>1 Motivacijski problemi i paradoksi</b>	<b>15</b>
Hilbertov hotel . . . . .	17
Zašto su 2 i 2 četiri? . . . . .	19
Sankt Peterburški paradoks . . . . .	24
Gabrijelova truba . . . . .	27
Beskonačnost u umjetnosti i filozofiji . . . . .	32
<b>2 Brojevi koji nisu ni cijeli ni dijelovi cijelog</b>	<b>35</b>
Iracionalni brojevi . . . . .	39
Prve violine . . . . .	42
Arhimedovo određivanje broja $\pi$ . . . . .	53
Mirno teku rijeke . . . . .	55
<b>3 Božanski omjer</b>	<b>59</b>
Leonardo Fibonacci . . . . .	62
Fibonaccijevi brojevi u prirodi . . . . .	66
Zlatni prozori . . . . .	66
<b>4 Beskonačne sume</b>	<b>71</b>
Karte na stol! . . . . .	73

Može li čaša uvijek biti puna . . . . .	75
Baselski problem . . . . .	81
Eulerovo rješenje . . . . .	82
Zenonovi paradoksi . . . . .	84
<b>5 Genij iz Kumbakonama</b>	<b>87</b>
Šest mjeseci bez odgovora . . . . .	90
U Cambridgeu . . . . .	91
Izgubljena bilježnica . . . . .	95
<b>6 Dvije vrste beskonačnosti</b>	<b>99</b>
Cantorova teorija skupova . . . . .	103
Brojevi transcendiraju . . . . .	106
Hipoteza kontinuumu . . . . .	107
<b>7 Beskonačnost u slikama</b>	<b>111</b>
Vizualni dokazi . . . . .	112
Redovi i geometrija . . . . .	117
Sume s alternirajućim znakom . . . . .	120
<b>8 Fraktali</b>	<b>125</b>
Cantorova prašina . . . . .	126
Fraktal snježne pahuljice . . . . .	128
Trokut Sierpiňskog . . . . .	131
Skriveni $\pi$ u Mandelbrotovom skupu . . . . .	134
Fraktalna dimenzija . . . . .	138
<b>9 Slutnja nad slutnjama</b>	<b>143</b>
Riemannova zeta funkcija . . . . .	147
Riemannova slutnja . . . . .	155
<i>L</i> -Funkcije . . . . .	158
Otvoreni problemi . . . . .	159
Matematičari u Parizu . . . . .	160
<b>10 Singulariteti u fizici</b>	<b>163</b>

Još neki titrajni sustavi . . . . .	165
Prigušeno titranje . . . . .	168
Tri zakona skrivena u mnoštvu podataka . . . . .	171
Newtonov zakon gravitacije . . . . .	176
Nebeski tenis . . . . .	179
<b>11 Einsteinova teorija relativnosti i postanak svemira 183</b>	
Pojam prostor-vremena . . . . .	185
Vrlo kratki uvod u opću teoriju relativnosti . . . . .	190
Kozmološka konstanta . . . . .	196
Fotografija i šum Velikog praska . . . . .	199
<b>Komentari uz poglavlja 203</b>	
<b>Iz recenzija 229</b>	

# Predgovor

**T**zavno ili neizravno, s pojmom beskonačnosti srećemo se na razne načine. U svakodnevničici svijet mašte doživljavamo neograničenim. Na neki način mašta proširuje naše tjelesne i materijalne ograničenosti. Pjesnik kaže kako beskonačno nadilazimo sami sebe. Kada je hrvatska nogometna reprezentacija ponovo došla na svjetski tron pobjedama u Rusiji, sreća nije bilo kraja. U komunikaciji razinu sreće gradiramo sve do pojma neizmjerno ili beskrajno. Kada je netko vrlo uspješan u svojoj djelatnosti, pitamo se gdje će mu biti kraj ili dokle će taj stići ne imajući pritom u vidu išta konkretno ili konačno. Isto tako, riječi unedogled i nikad implicitno sadrže beskonačnost. Njima neizravno kažemo kako nešto nije u konačnom prostoru odnosno vremenu. Kolika je vrijednost ekstraordinarnih slika starih majstora? Neprocjenjiva. I u kontekstu ekonomije i novca imamo implicitno prisutan pojam beskonačnosti. Beskonačnost nam se čini nedokučivom i nespoznatljivom, premda je prisutnija u našim životima nego nam se na prvi pogled može činiti.

Ipak, u umjetnosti i znanosti pojam beskonačnosti je određeniji. U književnosti česta je tema prolaznosti. Neuroznanstvenici pak propituju u kolikoj je mjeri ta prolaznost iluzija koju stvara naš mozak. Fizičari propituju smjer tijeka vremena te je li ono kontinuirano ili diskretno. Podrazumijevalo se tijekom stoljeća da svemir postoji oduvijek i rijetki su se sjetili to dovesti u pitanje. Također se pitamo je li svemir konačno ili beskonačno velik. Danas smatramo da je svemir nastao u jednom trenutku i u jednoj točki. Uvjerljivi su znanstveni argumenti za to. Naša slika o svemiru u kojem živimo krucijalno se promijenila nakon otkrića širenja svemira, pozadinskog zračenja i osatalog što ukazuje na takav postanak svemira. Taj se preokret odigrao

## Poglavlje 5

# Genij iz Kumbakonama

*Sigurno je istinito, jer nitko nema toliko mašte da bi ovo izmislio.*

- Godfrey Harold Hardy

**F**ormule koje je otkrio Srinivasa Ramanujan ostavljaju bez dah. Estetika njegovih identiteta s beskonačnim sumama i verižnim razlomcima najbolji su primjer tvrdnje da je matematika umjetnost. Jedno vrijeme sam običavao nastavu započeti nekom od tih suma. Studenti su bili fascinirani. Stoga sam u više navrata kad je bilo pogodno, pripremio neku od takvih formula, svima za poticaj i motivaciju. Na primjer

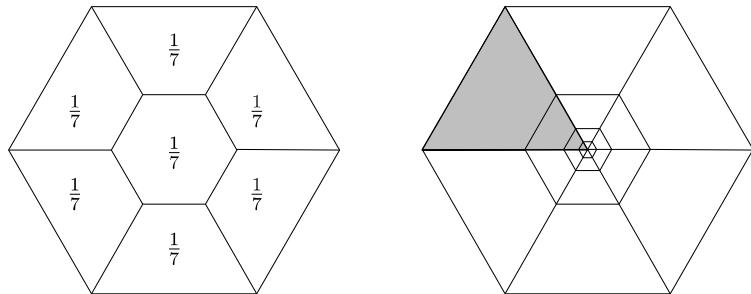
$$1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \dots = \frac{2}{\pi},$$

$$\frac{1}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{\vdots}}}} = \left( \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) e^{2\pi/5}.$$

Možemo samo zamisliti koliko je bilo iznenađenje Godfrey Hardya, vodećeg matematičara onog vremena, kada je u Cambridgeu primio pismo mladog, praktički u matematici samoukog, službenika



takav rezultat u punoj općenitosti. Taj dokaz možemo pronaći u radu australskog matematičara Jamesa Tantona objavljenom u časopisu *The College Mathematics Journal* 2008. godine, prikazanom na primjeru osmerokuta.



Slika 7.7: Vizualni dokaz relacije (7.2).

## Sume s alternirajućim znakom

U prethodnim razmatranjima članovi sume uvijek su bili pozitivni. Postavlja se pitanje možemo li na sličan način dokazivati i sume s negativnim članovima, s obzirom na to da površina uvijek ima pozitivnu vrijednost. Pokazat će se da možemo koristeći dvije različite boje za površine. Ekvivalentno možemo govoriti o dodavanju i brisanju ploha unutar polaznog geometrijskog lika.

Razmotrimo sada neke sume s alternirajućim znakom. Za jedan takav red vrijedi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{3}.$$

Tu jednakost možemo dokazati tako da naizmjenično dodajemo i brišemo plohe unutar geometrijskog lika ukupne površine 1. Sukladno tome, površine bojimo bijelom i sivom bojom. Pozitivan član sume korespondira sivoj boji, a negativan bijeloj. Beskonačno mnogo koraka ovog postupka rezultirat će s dvije trećine sive površine inicjalnog lika. U prvom koraku polazni lik je dakle cijeli obojen u sivo.

bodno reći da Einsteinova opća teorija relativnosti objedinjuje koncepte gravitacije, inercije i geometrije. Sažeto se Einsteinove jednadžbe mogu zapisati zadržavajućom relacijom

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu},$$

gdje skalar  $R$  kao i tenzor  $R_{\mu\nu}$  reprezentiraju zakrivljenost, a  $T_{\mu\nu}$  je tenzor energije i impulsa. Konstante u jednadžbi su gravitacijska konstanta  $G$  i brzina svjetlosti  $c$  (kao i *kozmološka konstanta* na lijevoj strani, u kasnijoj varijanti), a rješenje jednadžbe je tenzor  $g_{\mu\nu}$ .



Slika 11.3: Umjetnički prikaz crne rupe.

Matematička formulacija opće teorije relativnosti otvara mnoga pitanja. Ova teorija donosi predviđanja kao što su širenje svemira, singulariteti prostor-vremena, crne rupe. Najpopularnije predviđanje su zasigurno crne rupe. Danas malo tko sumnja u njihovo postojanje. Ako bismo se uputili na virtualno putovanje našom galaksijom približavajući se centru, imali bismo što za vidjeti - ne bismo ništa vidjeli jer se tamo nalazi masivna crna rupa. Crna rupa je tvorevina tako velike gravitacije da je ništa ne može napustiti. Česticu koja prijeđe *horizont događaja* crna rupa nepovratno usisa. Kako čak

orije gravitacije. Jedno od pitanja koje se nameće nakon upoznavanja te teorije je ono kako svemir može biti statičan ako se nebeska tijela međusobno uvijek privlače. Zar se, po tome, svemir ne bi trebao skupljati? No, ista stvar je i s Einsteinovom teorijom. Sjetimo se našeg analogona s elastičnim platnom koji iskrivljuju kugle. Kad stavimo dvije kugle, one će se približiti jedna drugoj zbog zakrivljenosti koje stvaraju. Stoga, i prema ovoj teoriji svemir bi se trebao skupljati tijekom vremena. (U to vrijeme još nije bilo poznato da se svemir sastoji od galaksija i da se one sve više udaljuju jedna od druge.)

Lemaître je bio jedan od znanstvenika koji su dobro poznavali Einsteinovu teoriju. Cilj mu je bio razviti model svemira koji će biti u skladu s Einsteinovom teorijom. Proučavajući Einsteinove formule, zapazio je nešto što ga je zasigurno ostavilo bez daha. Iz matematičke formulacije opće teorije relativnosti slijedilo je da postoje dvije mogućnosti za stanje svemira. Jednadžbe su pokazivale da se svemir može širiti, ali isto tako i skupljati! Dvije su dopustive mogućnosti pa je pitanje što je posrijedi, koja od mogućnosti je točna, a koja se odbacuje. Uglavnom, fundamenti iz kojih je Einstein razvio teoriju dopuštaju dvije mogućnosti. Na osnovu toga Lemaître postavlja hipotezu o praatomu iz kojeg je nastao svemir.

U to vrijeme znanstvenoj je zajednici bilo teško pomisliti da bi svemir mogao nastati u jednom trenutku iz jedne točke. Jer kako povjerovati da je sve što nas okružuje; polja, šume, svaka vlat trave, svaka kap vode, ljudi, život koji buja ... nastalo iz jedne jedine točke, praatoma. A sve to je tek naša neposredna okolina. Zemlja je tek jedan od planeta u našem planetarnom sustavu, naš planetarni sustav se nalazi u jednom kraku naše galaksije, a naša galaksija je tek jedna od mnoštva njih u svemiru.

Einsteinu se nije svidjela Lemaîtreova hipoteza. Štoviše, nije bio zadovoljan ni sa svojim jednadžbama koje su pokazivale da je svemir dinamičan. Inače, još neki drugi znanstvenici su shvatili da Einsteinove jednadžbe predviđaju širenje ili skupljanje svemira. Ruski fizičar Alexander Friedmann je došao do te interpretacije, ali i on je to doživio samo kao teorijsku mogućnost. Drugo na osnovu čega je Lemaître postavio svoju hipotezu bilo je razmatranje zakona degradacije energije (drugog zakona termodinamike). I tada Einstein čini